第２講　式と証明

PART1　恒等式，等式の証明

1　[1]　次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

$$(x-2)^3+a(x-2)^2+b(x-2)+c=x^3+x^2-8x+5$$

[2]　実数 a，b，c について，$a+b+c=0$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0$$

Point Pickup

[1]　x についての恒等式における未定係数の決定には，以下の２つの解法がある。

・係数比較法（両辺の同じ次数の項の係数が等しいことの利用）

・数値代入法（x にどんな値を代入しても成り立つ）

[2]　条件付きの等式の証明は，条件を用いて文字を減らして進めるとよい。

第 2 講　PART1　確認問題

1　次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

$$3(x+2)^3+a(x+2)^2+b(x+2)+c$$
$$=3x^3+9x^2+7x+1$$

$a=$ [アイ]，$b=$ [ウ]，$c=$ [エオ]

2　a，b，c が 0 でない実数で，$a+b+c=0$ のとき，

$$\frac{1-bc}{(a+b)(c+a)}+\frac{1-ca}{(b+c)(a+b)}+\frac{1-ab}{(c+a)(b+c)}$$

の値を求めよ。

[カキ]

第 2 講　式と証明

PART1　恒等式，等式の証明

1　[1]　次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

$$(x-2)^3+a(x-2)^2+b(x-2)+c=x^3+x^2-8x+5$$

[2]　実数 a，b，c について，$a+b+c=0$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0$$

[1]　(解法 1)

等式の左辺を展開し，x について整理すると

$$x^3+(a-6)x^2-(4a-b-12)x+(4a-2b+c-8)=x^3+x^2-8x+5$$

これが x についての恒等式となるとき

$$a-6=1,\ 4a-b-12=8,\ 4a-2b+c-8=5$$

これを解いて　$a=7$，$b=8$，$c=1$

(解法 2)

等式の両辺に $x=1$，2，3 をそれぞれ代入すると

$$-1+a-b+c=-1,\ c=1,\ 1+a+b+c=17$$

これを解いて　$a=7$，$b=8$，$c=1$

このとき，与えられた等式の左辺は

$$\begin{aligned}(x-2)^3+7(x-2)^2+8(x-2)+1&=x^3-6x^2+12x-8+7\left(x^2-4x+4\right)+8x-16+1\\&=x^3+x^2-8x+5\end{aligned}$$

となり，右辺と一致するから，与えられた等式は x についての恒等式となる。

以上より　$a=7$，$b=8$，$c=1$

［2］ $a+b+c=0$ より，$b+c=-a$，$c+a=-b$，$a+b=-c$

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3$$

$$=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+3=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+3$$

$$=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}+3=-1-1-1+3=0$$

よって

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0$$

第 2 講　PART1　確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：-9，ウ：7，エオ：-1

[解説]

（解法 1）

等式の左辺を展開し，x について整理すると [A]

$$3x^3+(a+18)x^2+(4a+b+36)x$$
$$+4a+2b+c+24$$
$$=3x^3+9x^2+7x+1$$

これが x についての恒等式となるとき

$$a+18=9,$$
$$4a+b+36=7,$$
$$4a+2b+c+24=1$$

これを解いて

$$\boldsymbol{a=-9,\ b=7,\ c=-1}$$

（解法 2）

等式の両辺に $x=-2,\ -1,\ 0$ をそれぞれ代入すると [A]

$$c=-1,$$
$$3+a+b+c=0,$$
$$24+4a+2b+c=1$$

これを解いて　$a=-9,\ b=7,\ c=-1$

このとき，与えられた等式の左辺は

$$3(x+2)^3-9(x+2)^2+7(x+2)-1$$
$$=3(x^3+6x^2+12x+8)-9(x^2+4x+4)$$
$$+7x+14-1$$
$$=3x^3+9x^2+7x+1$$

となり，右辺と一致するから，与えられた等式は x についての恒等式となる。

以上より

$$\boldsymbol{a=-9,\ b=7,\ c=-1}$$

[A]　x についての恒等式の未定係数（未知の係数）の決定には，以下の 2 つの解法がある。
- 係数比較法
  両辺の同じ次数の項の係数が等しいことを利用。
- 数値代入法
  x にどのような値を代入しても成り立つことを利用。

2 **[正解]** カキ：-3

[解説]

$a+b+c=0$ より，

$$b+c=-a,\ c+a=-b,\ a+b=-c$$

であるから

$$\frac{1-bc}{(a+b)(c+a)}+\frac{1-ca}{(b+c)(a+b)}+\frac{1-ab}{(c+a)(b+c)}$$

$$=\frac{1-bc}{(-c)\cdot(-b)}+\frac{1-ca}{(-a)\cdot(-c)}+\frac{1-ab}{(-b)\cdot(-a)}$$ [B]

$$=\frac{1-bc}{bc}+\frac{1-ca}{ca}+\frac{1-ab}{ab}$$

$$=\frac{1}{bc}-1+\frac{1}{ca}-1+\frac{1}{ab}-1$$

$$=\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}-3$$

$$=\frac{a+b+c}{abc}-3$$

$$=-3$$

[B]　条件付きの等式の問題では，条件を用いて，文字を減らすなどの工夫をする。